Tematické okruhy pro přijímací zkoušku do navazujícího magisterského studia – program učitelství matematiky pro střední školy

<u>Matematická analýza</u>

1. Posloupnosti reálných čísel, limity.
Limita posloupnosti (vlastní a nevlastní), Bolzanova-Cauchyova podmínka. Věty o limitách. Vybrané posloupnosti.

2. Elementární funkce a jejich zavedení.
Goniometrické funkce a cyklometrické funkce. Exponenciální funkce, přirozený a obecný logaritmus, obecná mocnina, odmocnina. Vlastnosti těchto funkcí a jejich vzájemné vztahy.

3. Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Průběh funkce, užití vyšších derivací.
Limita funkce, aritmetika limit, limita složené funkce, limitní přechod v nerovnosti, limita monotónní funkce. Spojitost funkce v bodě a na intervalu, Heineova definice spojitosti, vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Derivace funkce, početní pravidla pro derivování, derivace inverzní funkce. Věty o střední hodnotě: Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova. L'Hospitalovo pravidlo. Vztah derivace a monotonie funkce, nutné a postačující podmínky pro extrém. Taylorův polynom, Taylorova věta. Konvexnost a konkávnost a jejich souvislost s druhou derivací funkce. Asymptoty.

4. Primitivní funkce, Newtonův integrál.
Základní primitivní funkce. Integrace per partes. První a druhá věta o substituci. Integrace racionálních funkcí, základní typy substitucí.

5. Riemannův integrál.
Zavedení Riemannova integrálu, geometrická interpretace. Riemannův integrál jako funkce horní meze. Newtonova-Leibnizova formule. Existenční věty pro Riemannův integrál. Nevlastní integrál. Délka křivky zadané parametricky, objem rotačního tělesa a povrch jeho pláště, obsah plochy zadané parametricky.

6. Nekonečné číselné řady, mocninné řady.
Součet řady, konvergentní a divergentní řady, Bolzanova-Cauchyova podmínka, nutná podmínka konvergence. Řady s nezápornými členy a kritéria jejich konvergence: srovnávací, odmocninové, podílové a integrální kritérium, limitní tvary kritérií. Řady se střídavými znaménky, Leibnizovo kritérium. Absolutně a neabsolutně konvergentní řady. Mocninná řada a její konvergence, poloměr konvergence. Derivace a integrace mocninné řady člen po členu.

7. Diferenciální rovnice.
Věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy. Metody řešení diferenciálních rovnic (rovnice se separovanými proměnnými, lineární rovnice prvního a vyššího řádu). Lineární rovnice prvního a vyššího řádu: existence a jednoznačnost řešení, struktura množiny řešení, variace konstant, rovnice s konstantními koeficienty, speciální tvary pravé strany.

8. Funkce více proměnných.
Limita a spojitost. Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál, gradient. Derivace složené funkce. Věta o inverzní funkci. Věta o implicitní funkci. Lokální extrémy, vázané extrémy, metoda Lagrangeových multiplikátorů.

Algebra a lineární algebra

1. Relace, zobrazení a jejich základní vlastnosti.
Relace a jejich vlastnosti. Ekvivalence, uspořádání, úplné uspořádání, příklady. Rozklad množiny podle ekvivalence. Zobrazení (injektivní, surjektivní a bijektivní), skládání zobrazení; jádro a obraz zobrazení, rozklad zobrazení na surjekci, bijekci a injekci.

2. Vektorový prostor, báze, dimenze, lineární zobrazení. Vektorový prostor se skalárním součinem.
Příklady vektorových prostorů, lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze konečně generovaného vektorového prostoru, věta o dimenzích spojení a průniku. Vlastnosti homomorfismu, věta o hodnosti a defektu. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru, ortonormální báze, ortogonální doplněk podprostoru. Prostor se skalárním součinem, Cauchyova-Schwarzova nerovnost, trojúhelníková nerovnost, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.

3. Matice a jejich vlastnosti, užití k řešení soustav lineárních rovnic. Podobnost matic.
Hodnost matice, regulární a singulární matice, inverzní matice, matice homomorfismu. Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Věta o dimenzi vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy. Užití matic k řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda. Vlastní čísla a vlastní vektory, podobnost matic, Jordanova báze, Jordanův kanonický tvar. Charakteristický a minimální polynom.

4. Lineární a bilineární formy.
Lineární formy, duální prostor, duální báze. Bilineární a kvadratické formy a jejich matice, polární báze, normální báze, Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem, signatura.

5. Determinanty a jejich vlastnosti, Cramerovo pravidlo.
Definice determinantu, Sarrusovo pravidlo, věta o rozvoji determinantu, charakterizace regulárních matic pomocí determinantů. Výpočet inverzní matice pomocí determinantů. Věta o násobení determinantů. Řešení soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla.

6. Přirozená a celá čísla, dělitelnost.
Přirozená čísla, Peanovy axiomy, matematická indukce, dobré uspořádání. Konstrukce oboru integrity celých čísel. Dělitelnost, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek. Eukleidův algoritmus a Bézoutova věta, Eukleidovo lémma, Základní věta aritmetiky. Numerační soustavy o různých základech. Prvočísla, Eratosthenovo síto, mohutnost množiny všech prvočísel. Fermatova čísla a prvočísla. Přirozená čísla jako svaz. Kongruence modulo n, odvození kritérií dělitelnosti. Malá Fermatova věta.

7. Čísla racionální, reálná a komplexní.
Konstrukce pole racionálních čísel, podílové pole. Reálná čísla (Dedekindovy řezy, desetinné rozvoje, cauchyovské posloupnosti, axiomatický popis R), iracionalita. Řetězové zlomky, konvergenty, aproximace reálných čísel racionálními. Algebraická a transcendentní čísla. Pole komplexních čísel, zavedení, vlastnosti. Algebraický a goniometrický tvar, operace a jejich geometrické znázornění, Moivreova věta a její aplikace. Mohutnosti číselných oborů.

8. Grupy a jejich homomorfismy. Algebraické struktury se dvěma binárními operacemi.
Binární operace na množině. Pojem grupy, grupa permutací, grupy symetrií pravidelných *n*-úhelníků, další příklady. Podgrupy a jejich vlastnosti, svaz podgrup. Cyklické grupy a jejich vlastnosti. Lagrangeova věta. Homomorfismy grup, příklady. Jádro a obraz homomorfismu a jejich vlastnosti. Faktorizace grupy podle normální podgrupy. Příklady. Okruh, obor integrity, těleso, pole, příklady.

9. Základní pojmy dělitelnosti v komutativním oboru integrity.
Relace dělitelnosti a asociovanosti v oboru integrity. Příklady eukleidovských oborů integrity a příklady na užití Eukleidova algoritmu. Ireducibilní prvek, prvočinitel.

10. Rovnice.
Základní věta algebry. Rovnice 1., 2. a 3. stupně, metody jejich řešení řešení, casus irreducibilis. Vietovy vzorce. Racionální a celočíselné kořeny algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty, algebraická a transcendentní čísla. Reciproké rovnice. Lineární diofantické rovnice, Pellova rovnice.

11. Posloupnosti, průměry.
Aritmetická a geometrická posloupnost. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Geometrická řada a harmonická řada. Aritmetický, geometrický a harmonický průměr, jejich vztah a geometrické znázornění.

<u>Geometrie</u>

Syntetická geometrie

1. Planimetrie (věty i s důkazy).
Pojmy: části přímky (úsečka, polopřímka), vzájemná poloha dvou přímek v rovině, odchylka přímek, části roviny (úhel, polorovina, rovinný pás), dvojice úhlů (vrcholové, vedlejší, souhlasné, střídavé úhly).

Základní věty geometrie trojúhelníku: Thalétova, Eukleidovy, Pýthagorova a její zobecnění (např. Hippokratovy měsíčky), sinová, kosinová, součet vnitřních úhlů. Trojúhelníková nerovnost. Těžiště a ortocentrum, Eulerova přímka, střední příčky, osy stran a osy úhlů, kružnice opsaná, vepsaná a připsaná. Konstrukce trojúhelníku z daných prvků. Aplikace vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.

Klasifikace a vlastnosti čtyřúhelníků, konstrukce; vlastnosti tečnových a tětivových čtyřúhelníků (Ptolemaiova věta, součty vnitřních úhlů). Konvexní mnohoúhelníky (součet vnitřních úhlů, počet úhlopříček), pravidelné *n*-úhelníky a jejich vlastnosti.

Kružnice a její vlastnosti (tečny, tětivy, obvodové a středové úhly, úsekový úhel, mocnost bodu ke kružnici, chordála dvou kružnic), konstrukce. Vzájemná poloha dvou kružnic. Apollóniovy úlohy.

Obvody a obsahy rovinných útvarů, např. obsah trojúhelníku, Hérónův vzorec, obsah čtyřúhelníku a *n*-úhelníku. Obsah a obvod kruhu a jeho částí.

Shodnosti, podobnosti, stejnolehlost. Užití shodností a stejnolehlosti v konstrukčních úlohách. Skládání shodností, posunutá souměrnost. Kruhová inverze.

Axiomatický přístup k výstavbě geometrie.

2. Stereometrie (věty i s důkazy).
Obrazy těles ve volném rovnoběžném promítání. Základní stereometrické věty a jejich důkazy (rovnoběžnost přímky a roviny, rovnoběžnost dvou rovin, vzájemná poloha tří rovin, kolmost přímky a roviny, kolmost dvou rovin). Průnik přímky s tělesem, průsečnice rovin, řezy mnohostěnů. Vzdálenosti a odchylky bodů, přímek, rovin. Mnohostěny, Eulerova věta. Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa, jejich počet a vlastnosti). Objem a povrch těles a jejich částí, Cavalieriho princip. Geometrická zobrazení v prostoru (shodnosti, podobnosti).

3. Zobrazovací metody.
Princip rovnoběžného a středového promítání. Osová afinita, elipsa jako afinní obraz kružnice, konstrukce elipsy vycházející z osové afinity (Rytzova, trojúhelníková), užití osové afinity při konstrukci řezů hranolů a válců. Základy Mongeova promítání. Základy kosoúhlého promítání a průměty jednoduchých těles. Základy lineární perspektivy.

Analytická geometrie

1. Afinní prostor.
Afinní prostor a jeho zaměření. Lineární kombinace bodů. Lineární soustava souřadnic. Podprostor a jeho parametrické vyjádření. Obecná rovnice nadroviny (odvození pomocí lineárních forem), podprostor jako průnik nadrovin, obecné rovnice podprostoru. Vzájemná poloha podprostorů. Orientace afinního prostoru.

2. Eukleidovský prostor.
Skalární součin, eukleidovský prostor a jeho podprostory, obecná rovnice nadroviny. Vnější součin, vektorový součin a jejich základní vlastnosti. Kartézská soustava souřadnic. Kolmost podprostorů. Odchylka dvou přímek, dvou nadrovin, přímky a nadroviny, odchylka přímky a podprostoru. Vzdálenost bodu od podprostoru, vzdálenost bodu od nadroviny, vzdálenost podprostorů; osa dvou mimoběžných podprostorů, Gramův determinant. Příklady v E^2 a E^3.

3. Množiny bodů daných vlastností, kuželosečky.
Apollóniova kružnice. Kuželosečky jako řezy kuželové plochy, Quételetova-Dandelinova věta. Definice, vlastnosti a klasifikace kuželoseček. Kanonické rovnice kuželoseček a jejich transformace. Ohnisková a vrcholová rovnice kuželosečky. Parametrické vyjádření kuželoseček a rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích. Bodové konstrukce elipsy (proužková součtová a rozdílová, trojúhelníková, bodová podle definice), paraboly (bodová dle definice), hyperboly (bodová dle definice). Vzájemná poloha přímky a kuželosečky.

4. Grupy geometrických zobrazení.
Dělicí poměr, afinní zobrazení, asociovaný homomorfismus. Afinity (základní afinity, homothetie), samodružné body a směry, příklady v A^2 a A^3 včetně analytického vyjádření. Projekce. Shodnosti, podobnosti, samodružné body a směry, příklady v E^2 a E^3 včetně analytického vyjádření, klasifikace v E^2. Stereografická projekce, analytické vyjádření a vlastnosti kruhové inverze. Grupy geometrických transformací.

Diferenciální geometrie

1. Křivky v rovině a v prostoru.
Parametrické vyjádření křivky, příklady. Délka křivky, parametrizace obloukem. Frenetův repér a Frenetovy vzorce v rovině a v prostoru, křivost a torze.

2. Plochy v prostoru.
Parametrické vyjádření plochy, příklady. Tečná rovina, normála. První a druhá základní forma plochy a jejich užití. Hlavní směry a hlavní křivosti plochy, střední a Gaussova křivost. Zobrazení mezi plochami (izometrie, konformní zobrazení).