PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Modelové úlohy přijímacího testu z matematiky

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte: $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$.

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte: $\left(\dfrac{1-a}{1+a}-3\right)\cdot\left(\dfrac{-2a}{1+2a}+1\right)$.

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

$$\left(\frac{a}{b^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{b}{a^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right) \quad .$$

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

$$\left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\frac{a^2-2a}{4-a}+\frac{a+8}{a+2} \quad .$$

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte: $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$.

* Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte: $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}$.

* Zjednodušte tento výraz a najděte, za jakých podmínek existuje:

$$x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-x)(1-x^{-\frac{1}{2}})}{1-\sqrt{x}} \quad .$$

* Pro $a>0$ vyjádřete jednou odmocninou: $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{-1}}}$.

* Určete podmínky existence výrazu a výraz upravte: $4\cos^4 x-2\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x$.

* Určete reálná čísla α, β tak, aby platilo:
$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{\sin x}{1-\operatorname{cotg} x}=\alpha\cos x+\beta\sin x\ .$$
Dále stanovte podmínky, za jakých tato rovnost platí.

* V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} x+3|y|-1&=0 \quad , \\ x+\ \ y\ +3&=0 \quad . \end{aligned}$$

* V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $|x-4|+2x\ \leq\ |2x-1|$.

* V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $|1-2x|+3|x-2|\ >\ 4$.

* Určete hodnotu reálného parametru p v kvadratické rovnici $x^2+px+28=0$ tak, aby součet druhých mocnin jejích kořenů byl roven 65.

* Určete definiční obor funkce reálné proměnné: $f(x)=\sqrt{\dfrac{18+9x-2x^2}{4+3x^2}}$.

* Určete definiční obor funkce: $f(x)=\sqrt{x^5-4x^3}$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7)\ =\ 3$.

* Najděte všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnosti: $x+3\leq\dfrac{2(x+3)}{x-2}$.

* Najděte všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnosti: $\dfrac{6}{x-2}\ \leq\ \dfrac{2-x}{1+x}$.

* Určete všechna reálná čísla x vyhovující nerovnici: $\dfrac{x+2}{1-x}\leq -2$.

* Určete $A, B\in\mathcal{R}$ tak, aby platilo: $\dfrac{2x}{x^2+5x+6}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$ $(x\neq -2, x\neq -3)$.

* Výpočtem nalezněte reálná čísla vyhovující rovnici: $\sqrt{y+4}-\sqrt{y-1}\ =\ \sqrt{y-4}$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2\ =\ 0$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\sqrt{\dfrac{5x-4}{x+8}}+\sqrt{\dfrac{x+8}{5x-4}}\ =\ 2$.

* Výpočtem najděte všechna reálná čísla x, která splňují rovnici:
$$2\log(3x+1)-\log(x+11)=\log 4+\log(x-1)\ .$$

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $|-3+\log_2 2x\,| = 2$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$.

* V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $\log_2 \dfrac{3x+1}{x+1} \le -1$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$.

* V oboru reálných čísel řešte logaritmickou rovnici: $\log_x 16 + \log_{2x} 4 + \log_{2x} x^2 = 4$.

* V oboru reálných čísel řešte exponenciální rovnici: $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\dfrac{3^{x+2}}{3^{2x-4}} = \dfrac{\log 64}{\log 4}$.

* Řešte v $\mathcal{R}$: $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

* V oboru reálných čísel řešte goniometrickou rovnici: $4\sin^2\dfrac{x}{2} = -\sqrt{8}\sin\dfrac{x}{2}$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x\cdot\operatorname{tg} x = 1$.

* Vypočítejte všechny úhly x (vyjádřete je v obloukové míře, tj. radiánech), které vyhovují rovnici: $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 + 5\cos x$.

* V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\log_9(2\cos x) + \log_3 2 + \log_3 \cos x = \dfrac{3}{4}$.

* Určete reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu komplexního čísla
$$z = \frac{2}{1+\mathrm{i}} + \frac{7+4\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \ .$$

* Určete reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu komplexního čísla
$$z = \frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - (1-\mathrm{i})^3 - 7 \ .$$

* Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $z = \big(2-2\mathrm{i}\big)^6$.

* Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $z = \left(\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2$.

* V oboru komplexních čísel řešte rovnici: $z - |z| - 4\mathrm{i} = -2$.

* V oboru komplexních čísel řešte rovnici ($\bar{z}$ značí komplexně sdružené číslo k číslu z):

$$(1 - 2\mathrm{i})z = 2\bar{z} - \mathrm{i}(2 + \mathrm{i}) \ .$$

* Výpočtem najděte komplexní čísla z_1, z_2, která vyhovují této soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} 2\, z_1 - \quad z_2 &= -1 + 6\mathrm{i} \ , \\ z_1 + \mathrm{i}\, z_2 &= \quad 5 + 4\mathrm{i} \ . \end{aligned}$$

* Najděte komplexní čísla z_1 a z_2 (zapište je v algebraickém tvaru):

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\, z_1 + (2 + \mathrm{i})\, z_2 &= -2 + 3\mathrm{i}\,, \\ 2\, z_1 + \qquad \mathrm{i}\, z_2 &= \quad 3 - 3\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

* V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3u + \ v &= \quad 13 \quad , \\ 2u + \mathrm{i}v &= 3 + 2\mathrm{i} \quad . \end{aligned}$$

* Použitím Moivreova vzorce nalezněte algebraický tvar komplexního čísla $z = \left(1 - \mathrm{i}\right)^{10}$.

* Součet prvých devíti členů rostoucí aritmetické posloupnosti je 108. Určete je, víte-li, že jsou to čísla přirozená a první člen je větší než 5.

* Pro sedmý člen aritmetické posloupnosti platí $a_7 = 0$. Vypočtěte diferenci a součet prvních třinácti členů této posloupnosti, jestliže $a_{11} = 13$.

* Aritmetická posloupnost má diferenci $d = 3$. Určete podmínku pro třetí člen této posloupnosti a_3 tak, aby součet prvních devíti členů s_9 splňoval nerovnici $s_9 < 90$.

* Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Větší odvěsna měří 24 cm. Vypočtěte velikost menší odvěsny a přepony.

* Po odečtení prvního členu geometrické posloupnosti od členu čtvrtého dostaneme 315, po odečtení druhého členu od třetího dostaneme 60. Spočítejte kvocient této posloupnosti.

* Přičtete-li k číslům 1, 7 a 19 stejné číslo, dostanete po řadě první tři členy geometrické posloupnosti. Určete tyto členy.

* Výpočtem určete první člen a kvocient rostoucí (!) geometrické posloupnosti, jestliže její členy splňují tyto vztahy: $a_1 + a_2 + a_3 = 63\,,\ a_3 + a_4 + a_5 = 1008$.

* Určete všechna přirozená čísla vyhovující rovnici: $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$.

* Určete člen binomického rozvoje $\left(a + \frac{1}{3}b\sqrt{a}\right)^{27}$, který obsahuje a^{25}, a spočtěte jej.

* Pro které n je počet kombinací 3.třídy z n prvků 5-krát menší než počet kombinací 4.třídy z $(n+2)$ prvků ?

* Vyjádřete délku strany a a obsah S rovnostranného trojúhelníka pomocí poloměru r kružnice jemu opsané.

* Vypočtěte velikosti stran a, b trojúhelníka ABC, jestliže strana a je o 4 m delší než strana b a výška $v_a = 6$ m a výška $v_b = 9$ m.

* Je dán kosočtverec, jehož strana měří 5 cm a jeden vnitřní úhel 120°. Vypočtěte obsah kosočtverce a délku jeho delší úhlopříčky.

* Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2, jejichž poloměry jsou r_1, r_2, přičemž $r_1 > r_2$. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která je soustředná s kružnicemi k_1, k_2, tak, aby obsah mezikruží určeného kružnicemi k_1, k se rovnal obsahu mezikruží určeného kružnicemi k, k_2.

* Určete úhel, který svírá stěna pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou. Tělesová výška $v = 10$ cm, plocha podstavy $P = 25$ cm^2.

* Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací čtverce s délkou strany a kolem jedné z úhlopříček.

* Ocelová tyč obdélníkového průřezu je 6 m dlouhá, 50 mm široká, 20 mm vysoká a její hmotnost je 48 kg. Vypočtěte hmotnost tyče o rozměrech 4,5 m, 60 mm a 15 mm, je-li zhotovena ze stejného materiálu.

* Je dána výška $v = 3$ cm jehlanu, jehož podstavou je čtverec a plášť tvoří rovnostranné trojúhelníky. Vypočtěte délku hrany, povrch a objem jehlanu.

* Z osmi koulí o poloměru 2 cm se vytvoří slitím jedna velká koule. Určete její poloměr, objem a povrch.

* Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $B = [-3, 6]$ a která je kolmá na přímku q určenou body $K = [-2, 1], L = [3, 2]$. Nalezněte dále průsečík obou kolmic.

* Najděte obecnou rovnici přímky p, která prochází body $A[m, 0]$, $B[0, -3]$, kde m je reálný parametr. Dále najděte obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $C[m, -3]$ kolmo na přímku p.

* Najděte bod P souměrný s bodem $Q = [-2, -9]$ podle přímky, která je dána obecnou rovnicí $p: 2x + 5y - 38 = 0$.

* Je dán trojúhelník ABC: $A = [8, 1]$, $B = [2, 6]$, $C = [-4, 2]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice z vrcholu A. Dále vypočtěte souřadnice těžiště daného trojúhelníku.

* Napište obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $3x + y + 2 = 0$ a prochází středem elipsy $9x^2 + 25y^2 - 54x - 50y - 119 = 0$.

* Určete souřadnice středu a poloměr kružnice procházející body $(2, 9)$, $(7, 4)$, $(5, 8)$.

* Výpočtem určete rovnici kružnice, která prochází body $A = [3, 0]$, $B = [-1, 2]$ a jejíž střed leží na přímce $x - y + 2 = 0$.

* Spočtěte souřadnice středu a poloměr kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem $A = [-8, 1]$.

* Určete druh kuželosečky $4x^2 - 8x - 3y^2 - 12y - 20 = 0$, velikosti jejích poloos a vzdálenost jejího středu od bodu $M = [-3, 4]$.

* Jsou dány kuželosečky $k_1 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$, $k_2 : 4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$. Určete obecnou rovnici přímky, která prochází jejich středy.

* Nádrž se naplní současně dvěma přítokovými rourami za 18 minut. Naplňuje-li se pouze první rourou, naplní se nádrž o 48 minut dříve, než když se naplňuje pouze rourou druhou. Za kolik minut se nádrž naplní, je-li otevřena pouze první roura?

* Turista ušel 45 km. Kdyby urazil za hodinu o 500 metrů méně, došel by k cíli o 1 hodinu později. Jak rychle šel?

* Automobil jel z místa A do místa B vzdáleného 150 km. Kdyby jel rychlostí o 10 km za hodinu větší, byl by do B dojel o 30 minut dříve. Jak velkou rychostí automobil jel?

* Honza jel po řece z tábořiště A na tábořiště B proti proudu 1 hodinu. Kdyby jel obráceně a pádloval stejnou rychlostí, cesta by mu trvala 20 minut. Jakou rychlostí Honza pádloval a jaká byla rychlost proudu, jestliže vzdálenost mezi tábořišti byla 4 km?

výsledky příkladů z první strany:

$-\frac{2r}{s}$, $r \neq \pm s$, $s \neq 0$

$-\frac{2}{1+a}$, $a \neq -1$, $a \neq -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{a+b}$, $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0$

$\frac{12}{a+2}$, $a \neq 0$, $a \neq 4$, $a \neq \pm 2$

$\frac{2}{\sqrt{a}}$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\frac{2}{1+x}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$

$2\sqrt{x}$, $x > 0$, $x \neq 1$

$\sqrt{a^3}$

$x \in R$, $\frac{3}{2}$

výsledky příkladů z druhé strany:

$\alpha = \beta = 1$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

$(x, y) = (-5, 2), (x, y) = (-2, -1)$

$(-\infty, -1\rangle$

$(-\infty, 1) \cup (\frac{11}{5}, +\infty)$

$p = \pm 11$

$\langle -\frac{3}{2}, 6\rangle$

$\langle -2, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

$x = 16, x = 64$

$(-\infty, -3\rangle \cup (2, 4\rangle$

$(-1, 2)$

$(1, 4\rangle$

$A = -4, B = 6$

$y = 5$

$x = 1$

$x = 3$

$x = 5, x = \frac{9}{5}$

výsledky příkladů ze třetí strany:

$x = 1, x = 16$

$x = 4$

$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\rangle$

$x = 5$

$x = 4$

$x = \frac{3}{2}$

$x = 5$

$x = 2$

$x = 2k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$x = 2k\pi, x = \frac{5}{2}\pi + 4k\pi, x = \frac{7}{2}\pi + 4k\pi, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

reálná část 4, imaginární -3, absolutní hodnota 5

reálná část -4, imaginární 3, absolutní hodnota 5

reálná část 0, imaginární 512

reálná část 0, imaginární $-\frac{48}{25}$

výsledky příkladů ze čtvrté strany:

$z = 3 + 4\mathrm{i}$

$z = 7 + 4\mathrm{i}$

$z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$

$z_1 = 2 - \mathrm{i}$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$

$u = 3 - \mathrm{i}$, $v = 4 + 3\mathrm{i}$

$z = -32\mathrm{i}$

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

$d = \frac{13}{4}$, $s_{13} = 0$

$a_3 < 4$

18 cm, 30 cm

$q = 4$, $q = \frac{1}{4}$

6, 12, 24

$a_1 = 3$, $q = 4$

výsledky příkladů z páté strany:

$n = 2$

$650b^4a^{25}/3$

$n = 14, n = 3$

$a = \sqrt{3}r, S = 3\sqrt{3}r^2/4$

$a = 12\,\mathrm{m}, b = 8\,\mathrm{m}$

$P = 25\sqrt{3}/2\,\mathrm{cm}^2, u = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

$r = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)/2}$

přibližně $76°$

$V = \sqrt{2}\pi a^3/6$

32,4 kg

$3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}, 18(1 + \sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2, 18\,\mathrm{cm}^3$

$4\,\mathrm{cm}, 256\pi/3\,\mathrm{cm}^3, 64\pi\,\mathrm{cm}^2$

$5x + y + 9 = 0, [-2, 1]$

$p : 3x - my - 3m = 0, q : mx + 3y + 9 - m^2 = 0$

$[10, 21]$

výsledky příkladů ze šesté strany:

$x + 3y - 11 = 0, T = [2, 3]$

$3x + y - 10 = 0$

$S = [2, 4], r = 5$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

$S = [-5, 5], r = 5$ nebo $S = [-13, 13], r = 13$

hyperbola, $a = \sqrt{3}, b = 2, v = 2\sqrt{13}$

$x - 5y + 7 = 0$

24 minut

5 km/h

50 km/h

$v_H = 8\,\mathrm{km/h}$, $v_p = 4\,\mathrm{km/h}$