

K Přírodní dualitě statistického rozložení a souvislostem s poznatky ne-geografických disciplín

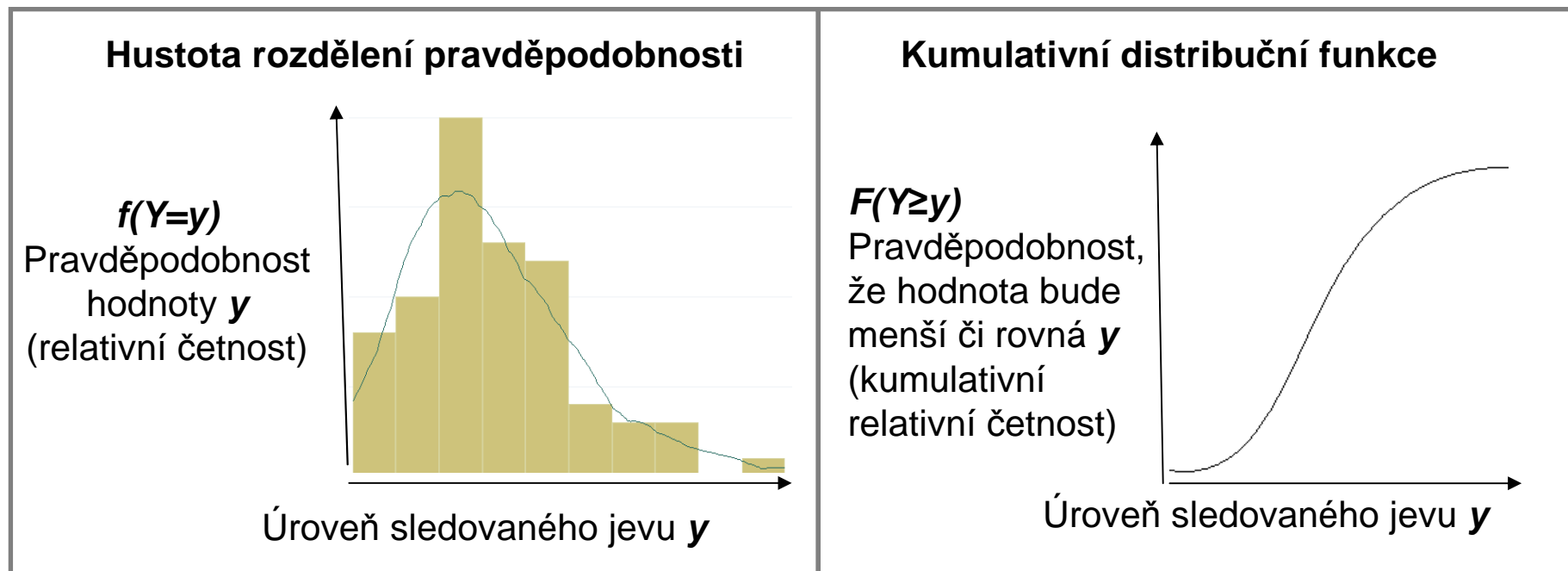
Připraveno na seminář věnovaný vzpomínce
na Profesora Jaromíra Korčáka
6.10.2009

Josef Novotný
pepino@natur.cuni.cz

„Statistické rozložení“

~ Hustota rozdělení pravděpodobnosti (frekvenční rozdělení)

~ Distribuční funkce



- Zásadní význam ve statistice
- Je nejběžnějším 1-rozměrným vyjádřením 2-rozměrné územní diference:
 $f_{x,z}(y) \rightarrow f(y)$
- Je vnějším vyjádřením – výsledkem – působení nejrůznějších faktorů, o těchto podmínkách však přímo nic neříká...

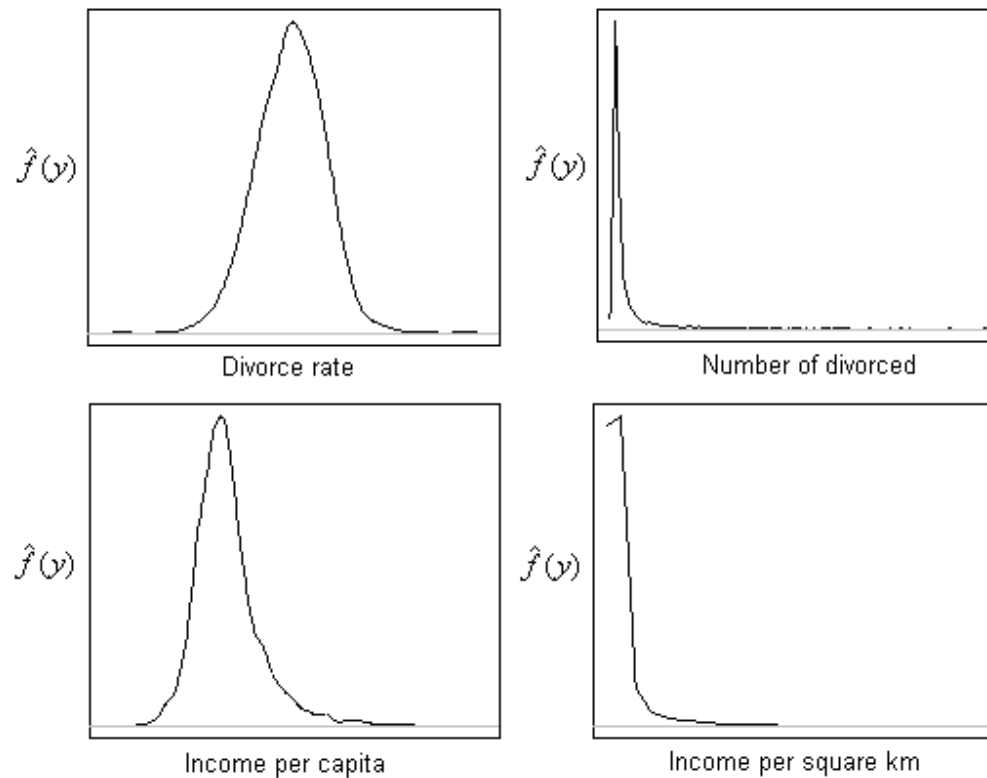


KORČÁK, J. (1941): Přírodní dualita statistického rozložení.
Statistický obzor, 22, 171-222, (předneseno v České statistické společnosti 20.2. 1941).
(rozpracováno i v dřívějších pracích)

- „Statistické rozložení není jen speciálním pojmem statistickým v přírodovědeckém pojetí ukazuje totiž určitou a obecnou pravidelnost ve struktuře vnějšího světa a tím přispívá k poznání světového řádu, tedy k objasnění představy, která patří k nejstarším ve filosofickém myšlení vůbec.“ (str. 172)
 - „...**rozložení krajně nesouměrné je a to levostranné**, vlastní předmětům zeměpisným, po případě událostem pozorovaným s hlediska povrchu zemského...“ (str. 220)
 - „V rozložení krajně nesouměrném můžeme spatřovati převahu příčin exogenních, tedy především všeobecného vnějšího prostředí, v rozložení souměrném pak převahu vnitřní individualisované potence druhové.“ (str. 222)
-
- Inspirace V. Láskou (1928) a jeho metodou určování škálových stupnic v zeměpisně-statistickém atlase ČSR na základě charakteru frekvenčního rozdělení

Příklady statistických rozdělení podle „strukturálních/kvalitativních“ a „velikostních“ znaků

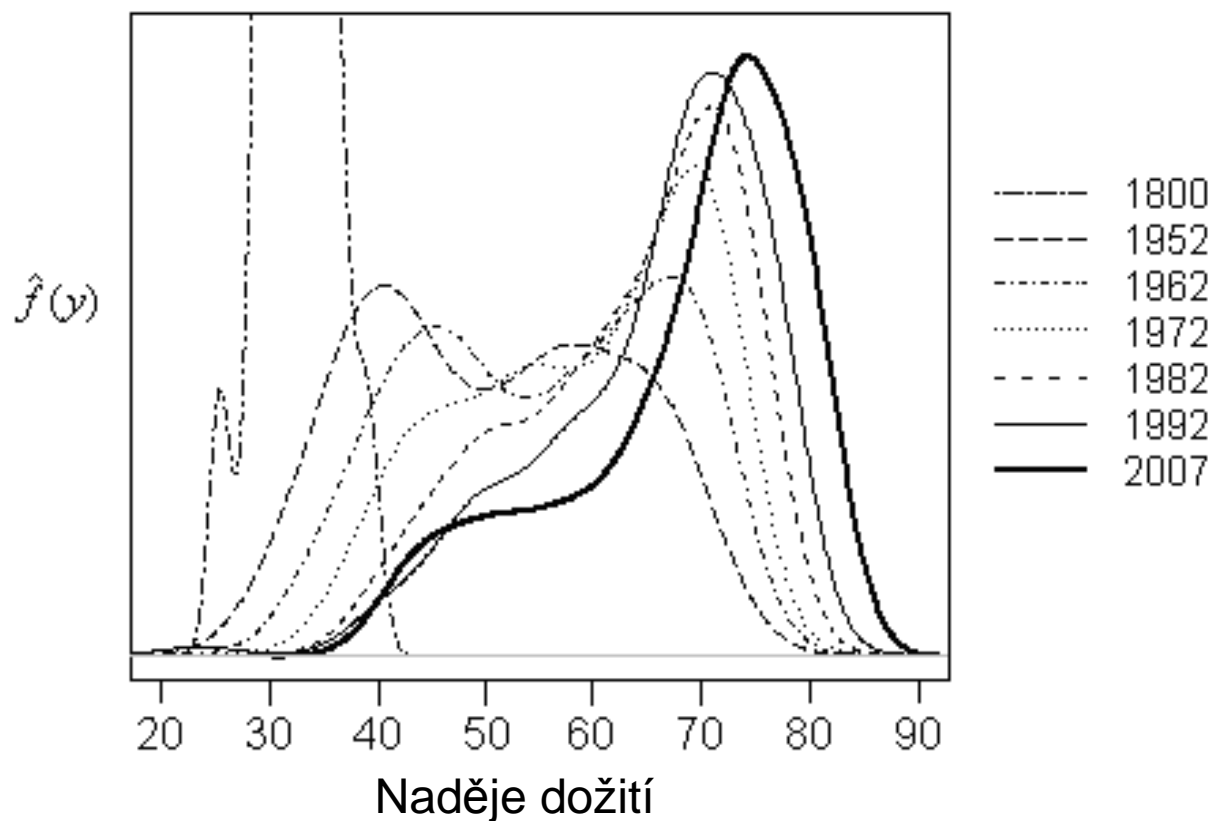
Rozdělení 3141 amerických okresů



+ „vnitřně“ determinovaná homogenita (normální rozdělení) elementů,
„přechodné“ rozdělení „semikomplexů“, vnějšími faktory determinované
asymetrické rozložení komplexů... (Hampl)

Relativní vývojová „proměnlivost“ statistických rozdělení podle strukturálních/kvalitativních znaků

Vývoj rozdělení zemí světa podle naděje dožití jejich obyvatel



Zdroj dat: *Gapminder.org* (řada odhadů – viz *Johansson 2008*)

„Historie normálního rozložení“



Abraham de Moivre (1738): *The Doctrine of Chances.*

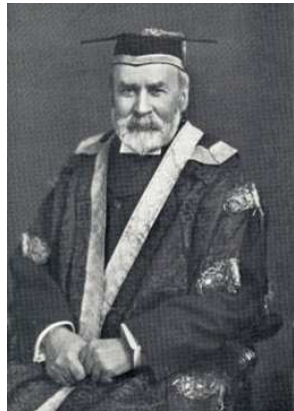
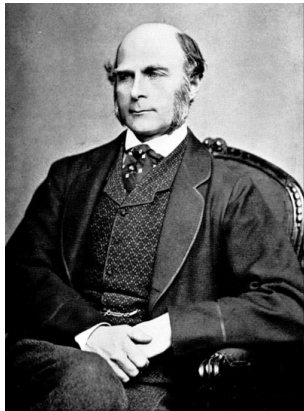
- Uvedl binomické rozdělení (hod mincí)
- Později Simpson (rozdělení chyb astronomických pozorování), Laplace, Gauss



Adolphe Quételet (1835): *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale. [„Člověk a rozvoj jeho schopností neboli eseje o sociální fyzice“]*

- Aplikoval „zákon symetricky rozdělených chyb“ nejen na biologické znaky, ale i v sociálních vědách
- Koncept „průměrného člověka“

„Historie duality statistického rozložení“



GALTON, F. (1879) *The geometric mean, in vital and social statistics*. Proc R Soc Lond, 29, 365-367.

McALISTER, D. (1879) *The law of geometric mean*. Proc R Soc Lond, 29, 367–376.

- Poukázali na nevhodnost aplikace „zákona symetrického rozdělení chyb“ v případech řady sociálních a „vitálních“ statistik
- Význam geometrického průměru jakožto reprezentativní střední hodnoty pro řadu těchto charakteristik
- Naznačení rozdílu mezi aditivními a multiplikativními procesy růstu

„Historie duality statistického rozložení“

- Zhruba od přelomu 19/20. století roste zájem o studium „asymetrických“ statistických rozložení – podobné poznatky dosaženy nezávisle v různých disciplínách

Obvyklé „kroky“ výzkumu krajně asymetrických rozložení:

1. Empirická dokumentace
2. Hledání teoretických modelů (aproximace matematickými funkcemi)
3. Pokusy o „vysvětlení“ – popis základních principů, mechanismů a procesů, které vedou ke vzniku daných forem variability

Empiricky doložené pravidelnosti krajně asymetrického rozložení

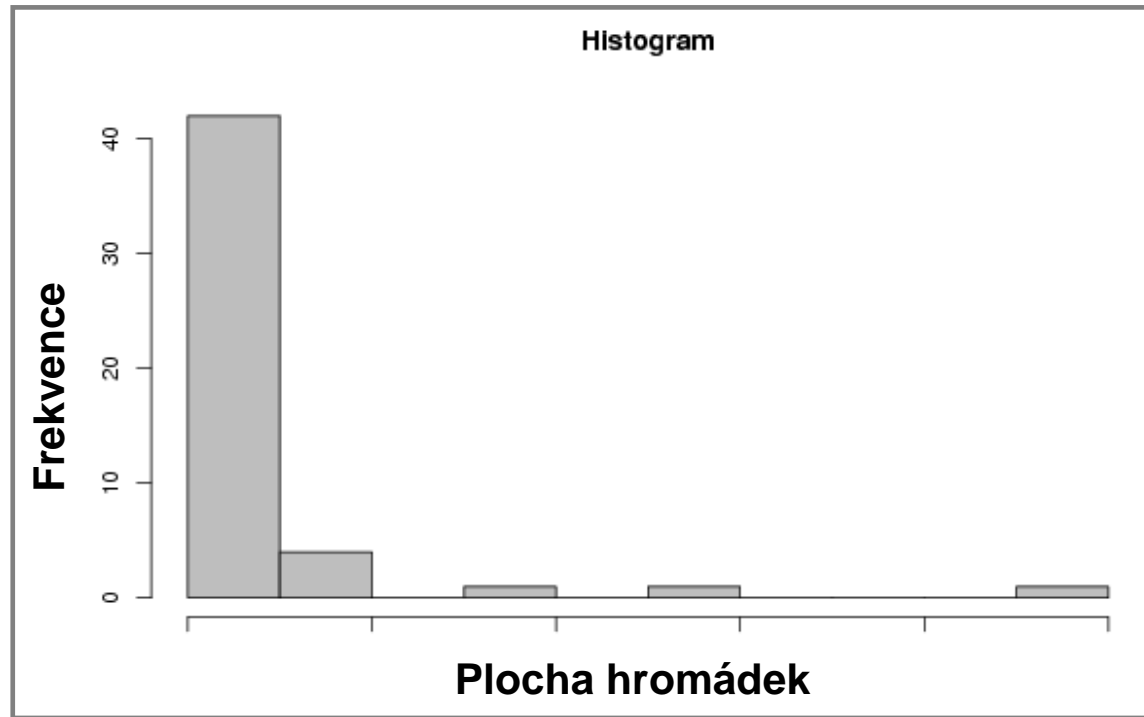
1897	PARETO	Rozdělení příjmů mezi jednotlivci uvnitř zemí
1922	WILLIS & YULE	Početnost biologických druhů na určitém území
1926	LOTKA	Publikační aktivita vědců (v rámci disciplíny)
1931	GIBRAT	Velikost firem
1932	ZIPF	Frekvence slov v knihách a jazycích (Estoup 1916) Velikost měst (Auerbach 1913)
1938	KORČÁK	Velikost jevů „pozorovaných z hlediska povrchu zemského“ (regiony podle hustoty pop., obce dle pop. i nadmořské výšky, rozloha a hloubka jezer, velikost ostrovů, řek, povodí atd.)
1944	GUTENBERG & RICHTER	Zemětřesení z hlediska uvolněné energie
1948	RICHARDSON	Velikost ozbrojených konfliktů

... A množství dalších jevů kolem nás... komplexní systémy studované v různých disciplínách: fyzika a astronomie, informatika, biologie a ekologie, geologie, ekonomie a sociologie, geografie, aplikované technické vědy ...

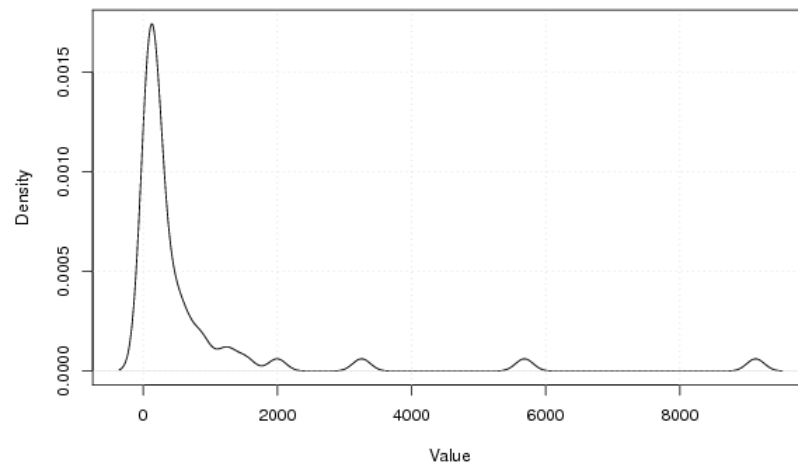
Empiricky doložené pravidelnosti krajně asymetrického rozložení



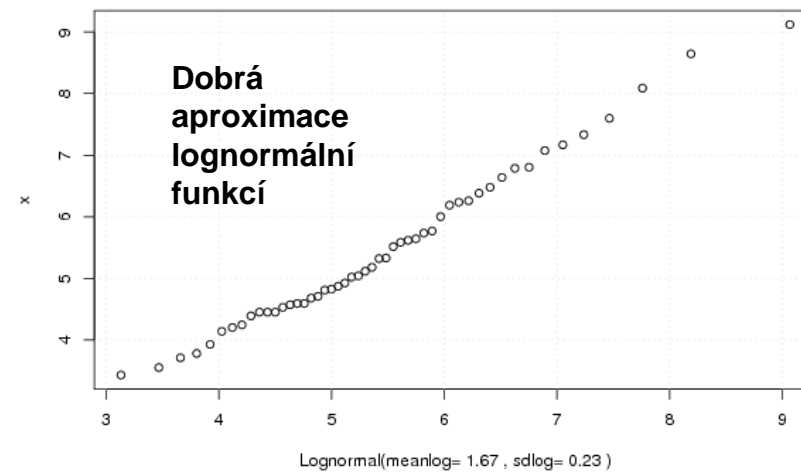
Viz http://www.youtube.com/watch?v=8hpoje38a_U

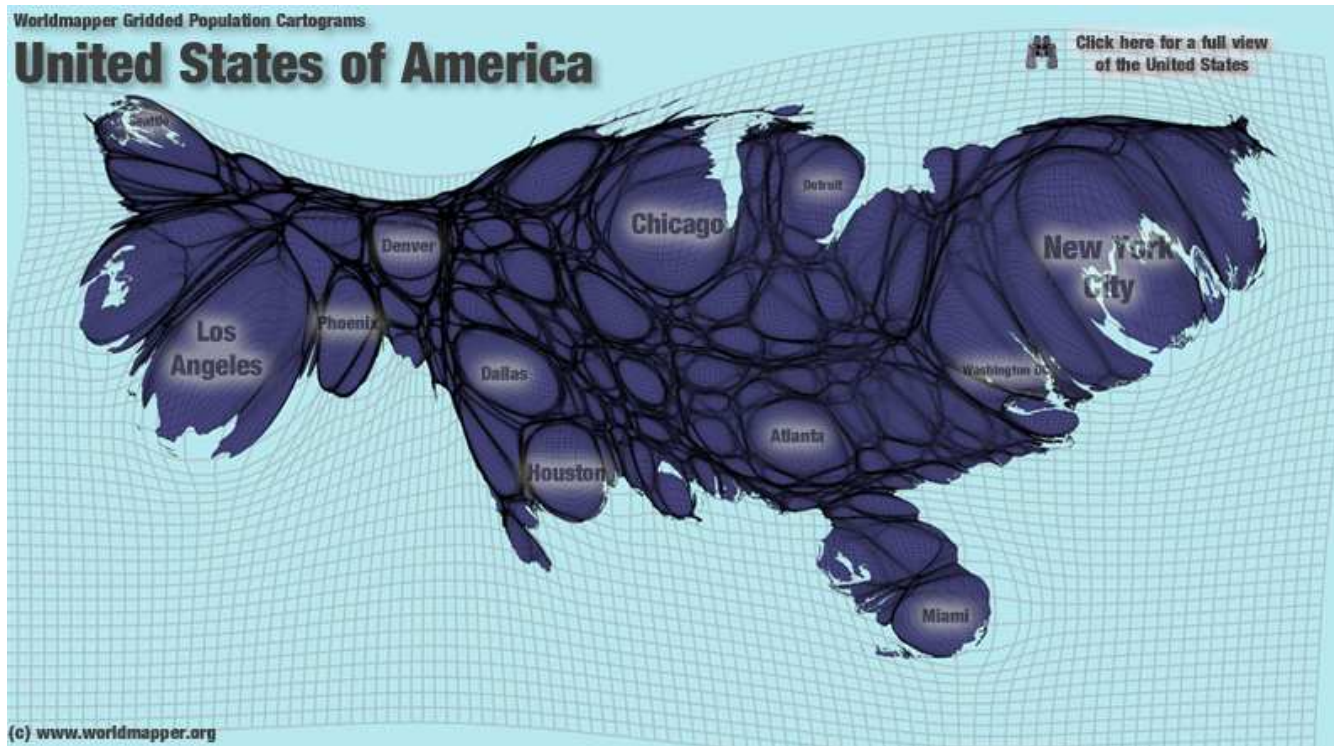


Gaussian Kernel

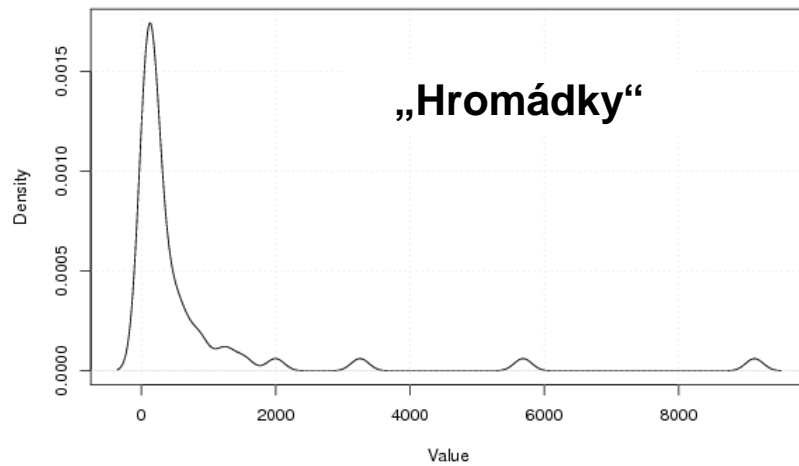


QQ plot (Lognormal)





Gaussian Kernel



Empiricky doložené pravidelnosti krajně asymetrického rozložení

Kroky tohoto výzkumu:

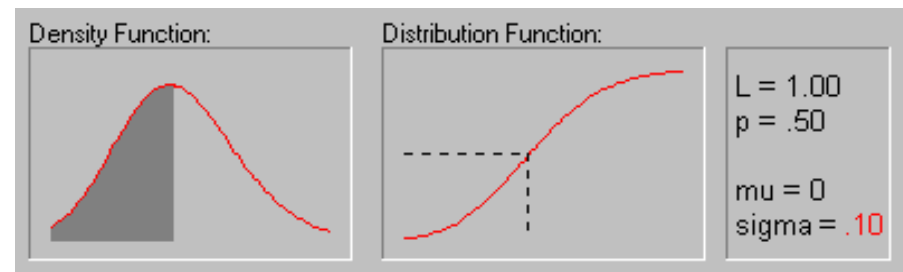
1. Empirická dokumentace
2. Hledání teoretických modelů (aproximace matematickými funkcemi)
3. Pokusy o „vysvětlení“ – popis základních principů, mechanismů a procesů, které vedou ke vzniku daných forem variability

Ad 2) Teoretické modely pro krajně asymetrická rozdělení

- Výsadní postavení lognormální a mocninné funkce
- Souvislost, resp. podobnost obou těchto modelů za určitých podmínek

Lognormální rozdělení

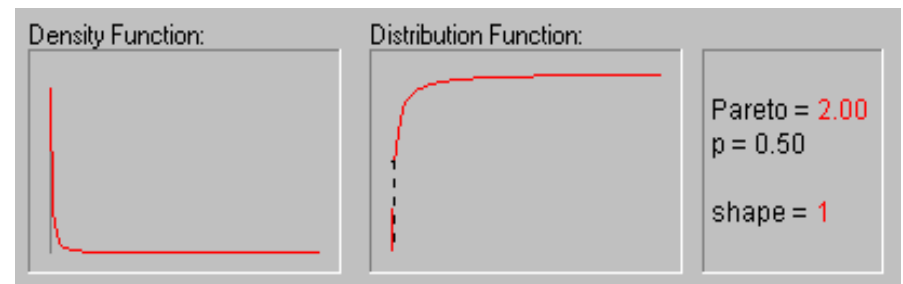
- Má-li X lognormální rozdělení, pak $\log(X)$ má normální rozdělení
- Obdobně fundamentální význam jako normální rozdělení



Mocninné funkce (power laws)

$$y = ax^{-k} \quad \rightarrow \quad \log(y) = \log(a) - k \cdot \log(x)$$

- Měřítkově invariantní (soběpodobné, fraktálovité)
- Zipfovo (rank-size rule) a Paretovo rozdělení jsou (mezi jinými) specifické případy mocninných funkcí



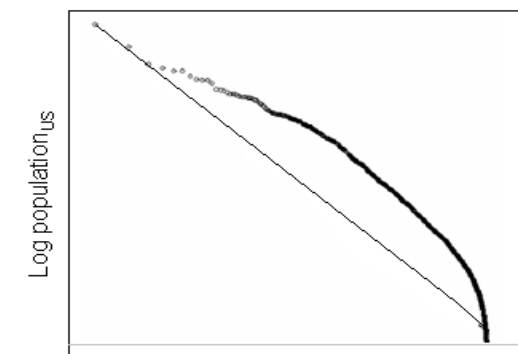
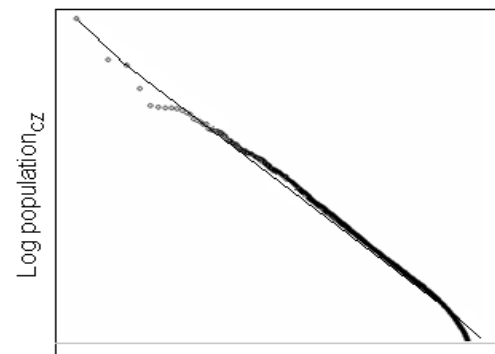
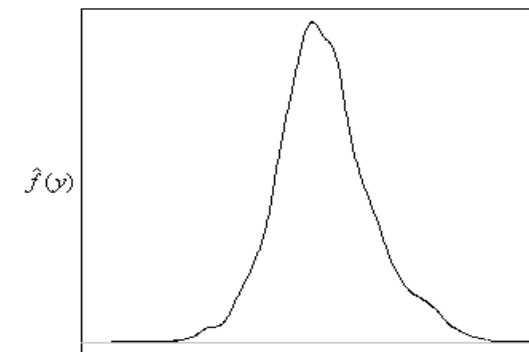
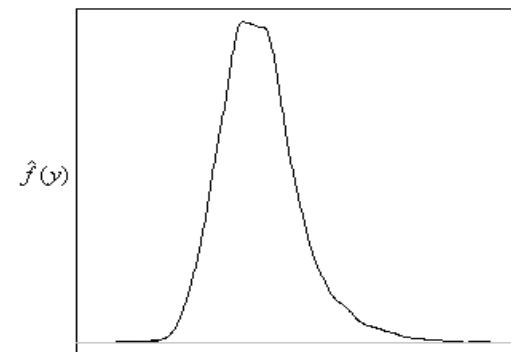
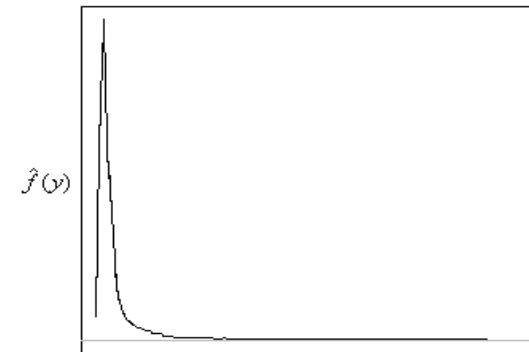
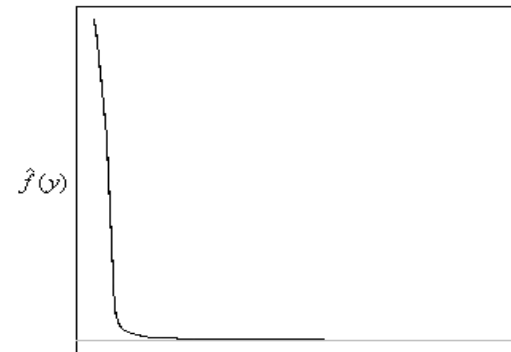
Tři populární způsoby znázornění krajně asymetrického rozložení

1. Rozložení hustoty
pravděpodobnosti –
lineární měřítko

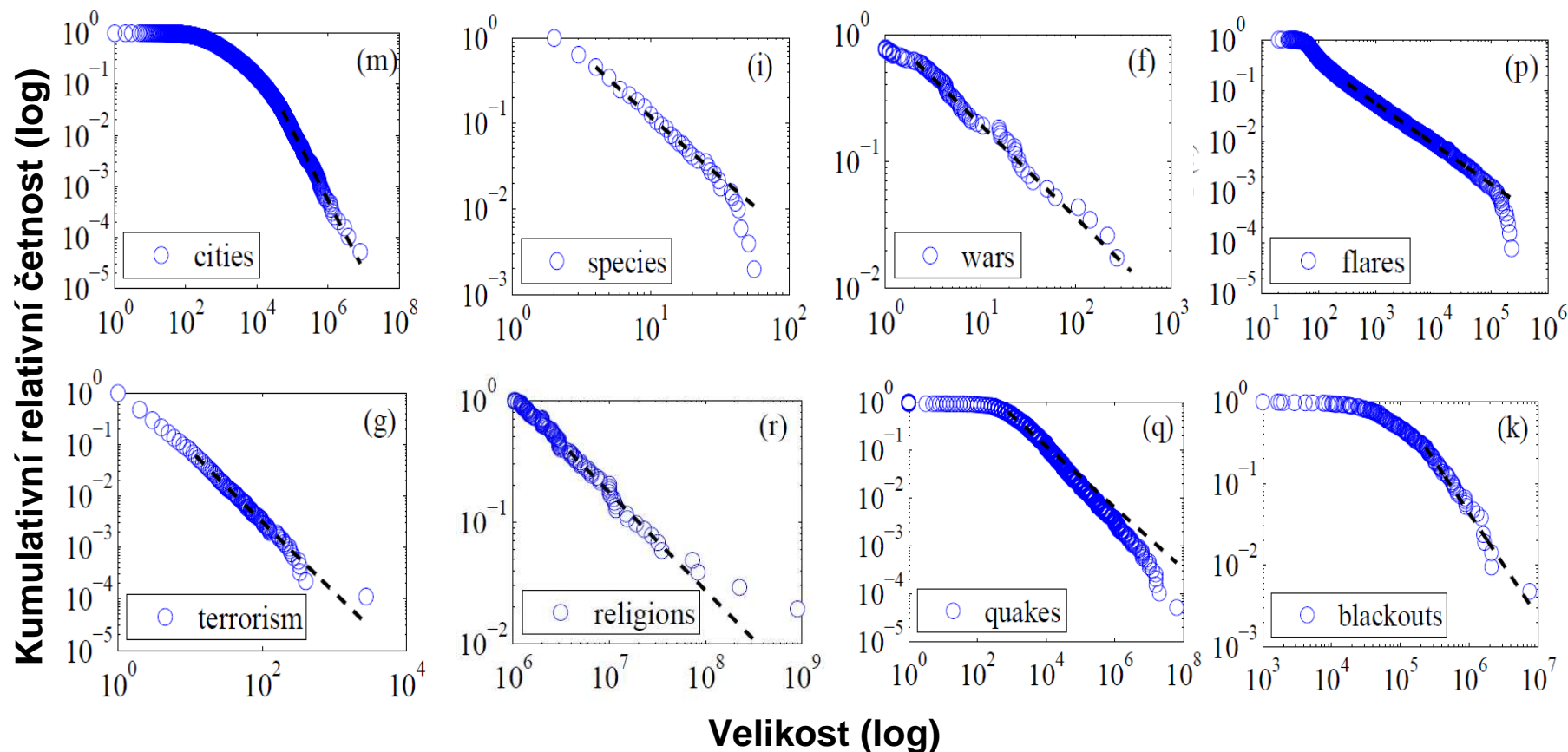
2. Rozložení hustoty
pravděpodobnosti –
logaritmické měřítko

3. „Rank-size log-log“
graf (a obdobně
kumulativní distribuční
funkce s log-log
měřítkem)

Statistické rozdělení obcí ČR a okresů USA
podle jejich populační velikosti



Aproximace vybraných empirických krajně asymetrických rozložení mocninou funkcí



Více viz Clauset et. al (2007): Power-law distributions in empirical data. <http://arxiv.org/abs/0706.1062v1>

Aproximace vybraných empirických krajně asymetrických rozložení mocninou funkcí – sociální sítě

Rozdělení lidí podle počtu (dosavadních) sexuálních partnerů

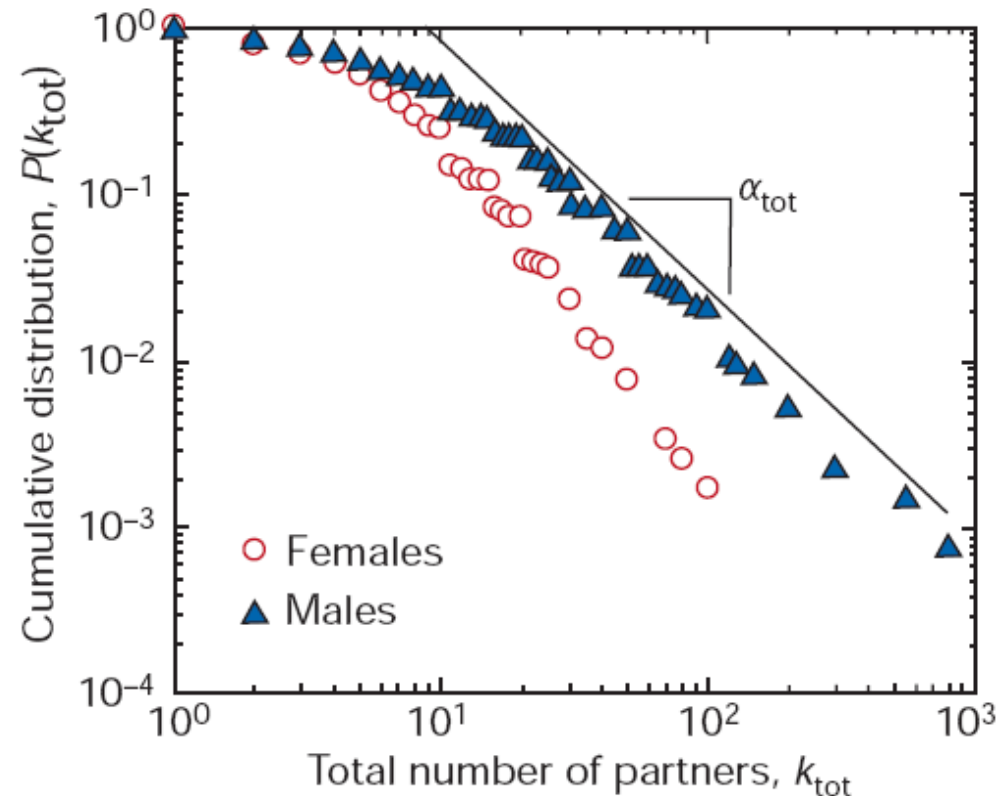
Švédsko, 2810 odpovědí
respondentů ve věku 17-74 let

Pro $k > 20$ dobrá aproximace
mocninnou funkcí:

$$P(k) \sim k^{-\alpha}$$

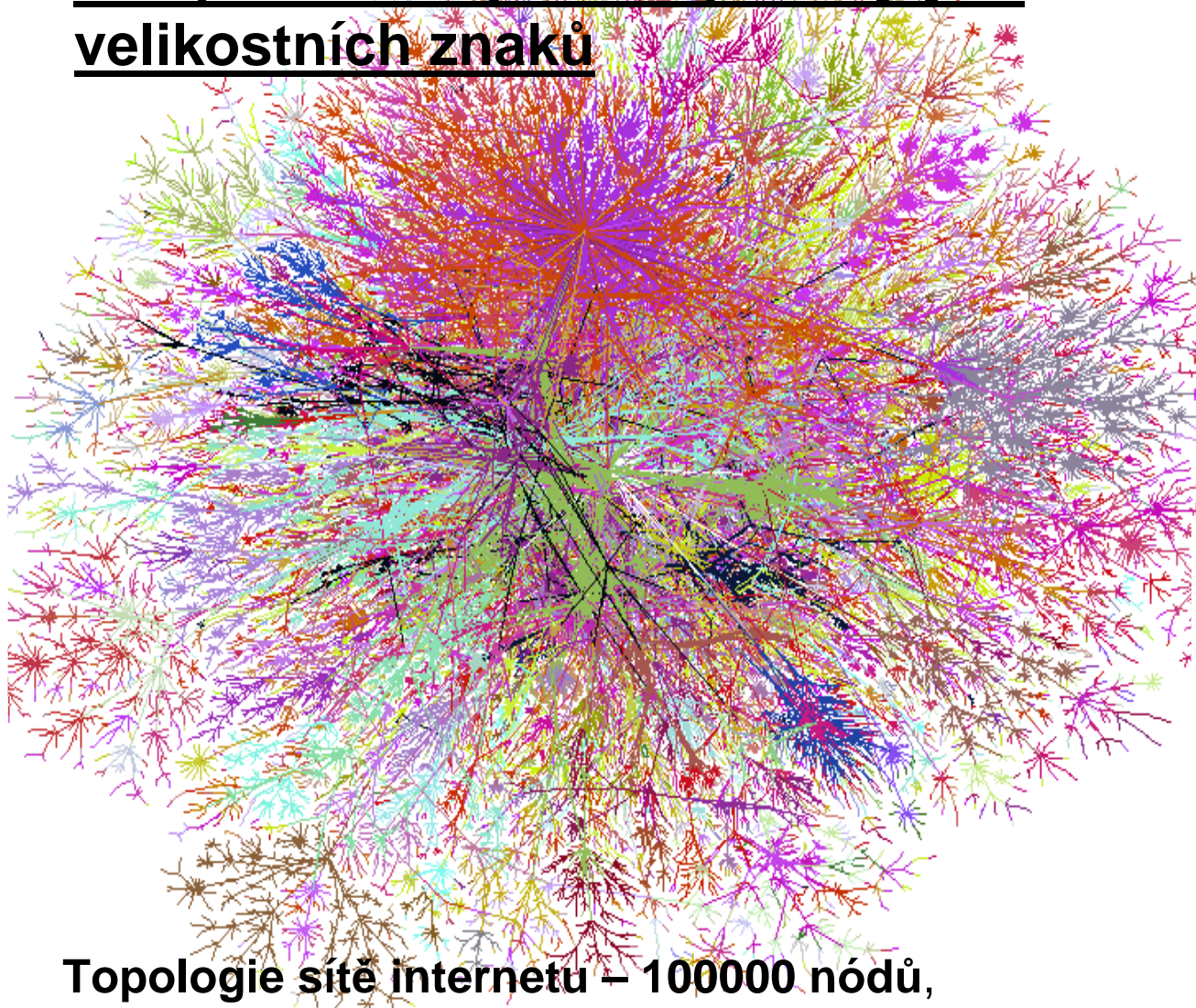
$$\alpha_{\text{females}} \sim 1.6$$

$$\alpha_{\text{males}} \sim 2.1$$

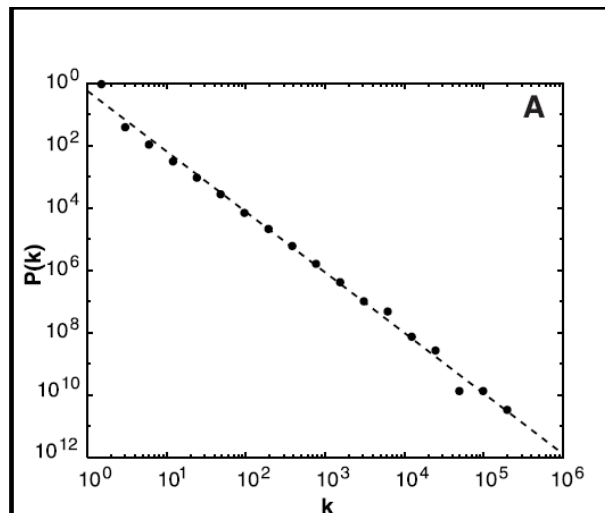


Liljeros, F., Edling, C. R., Amaral, L. A. N., Stanley, H. E. & Åberg, Y. (2001): The web of human sexual contacts. Nature 411, 907-908

Stabilita statistických rozdělení komplexních systémů podle jejich velikostních znaků



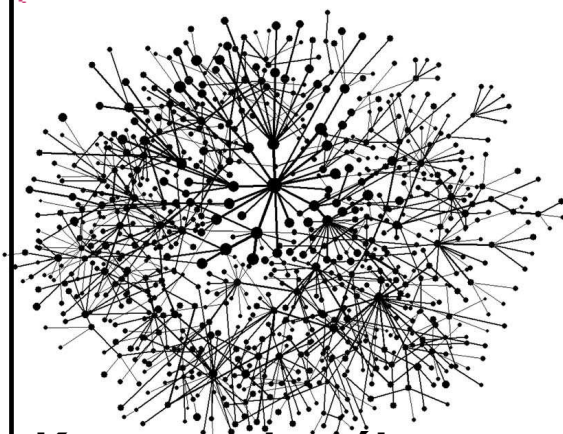
Topologie sítě internetu – 100000 nódů,
související IP adresy barevně odlišeny (Cheswick 1998)



Distribuce 260000

www nódů

(Adamic, Huberman 2000)

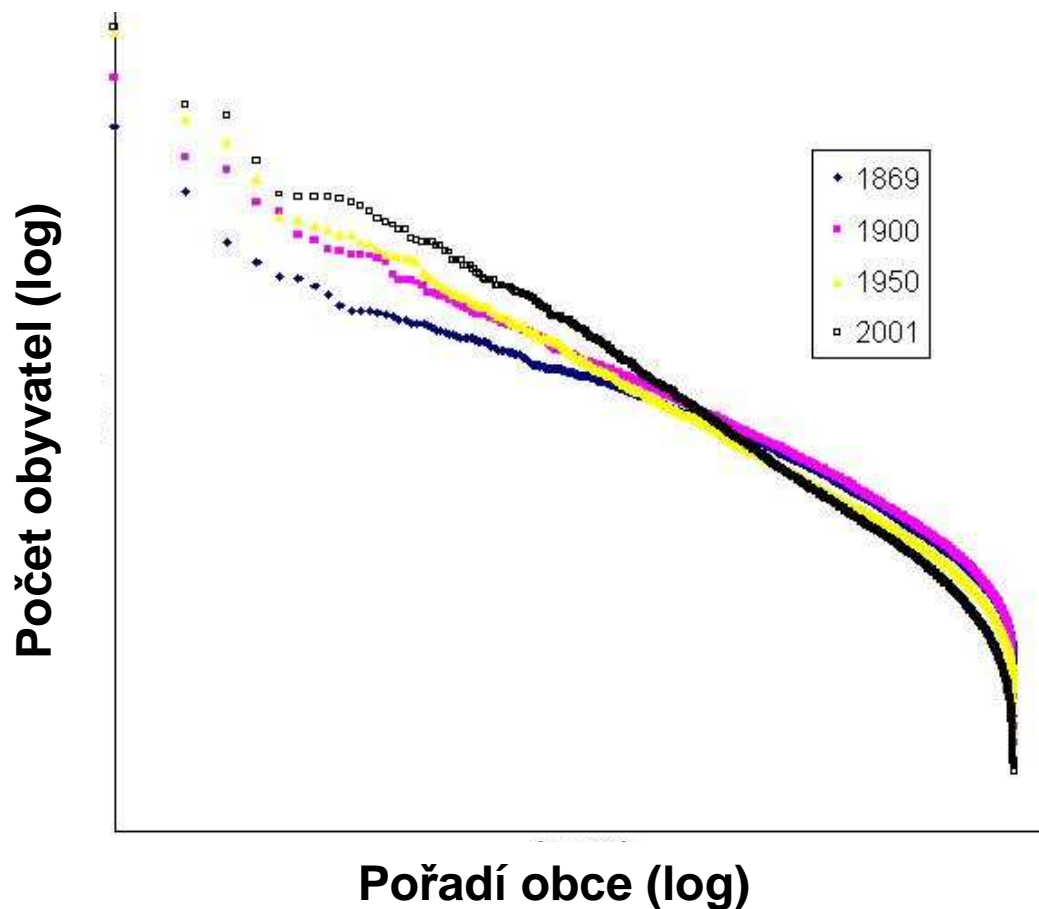


**Kostra webového
portálu - 933 nódů**

Dezsö et al. (2006)

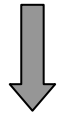
Vývojová stabilita statistických rozdělání komplexních systémů podle jejich velikostních znaků

Rozložení obcí v ČR podle jejich populační velikosti, 1869-2001
(rank-size, log-log graf)



Obvyklé kroky tohoto výzkumu:

1. Empirická dokumentace
2. Hledání teoretických modelů (aproximace matematickými funkcemi)
3. Pokusy o „vysvětlení“ – popis základních principů, mechanismů a procesů, které vedou ke vzniku daných forem variability



- A) Obecné statistické principy (stochastická, resp. „rámcová“ platnost)
- B) „Kontextuální“ procesy a faktory

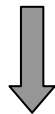
$$F(y) = f(A) + f(B)$$

Ad 3) Základní vysvětlení – jednoduché statistické modely vzniku asymetrických rozložení

- **Normální rozdělení** („nulový model“) podle Centrální limitní věty - vzniká **součtem** mnoha malých nezávislých vlivů
- Pokud ale mají tyto efekty **multiplikativní** charakter (tj. aditivní na logaritmickém měřítku) je výsledkem **lognormální distribuce**



- **Modely procesů „náhodného multiplikativního růstu“**
- Náhodné fluktuace v mírách růstu (např. určené externími faktory) určitých objektů vedou k jejich **lognormálnímu rozdělení** (viz „hromádky“)



- Pouze nepatrné modifikace modelu náhodného růstu – např. stanovení určité minimální velikosti pozorované jednotky – vedou k rozdělení popsateľnému **mocninnou funkcí**

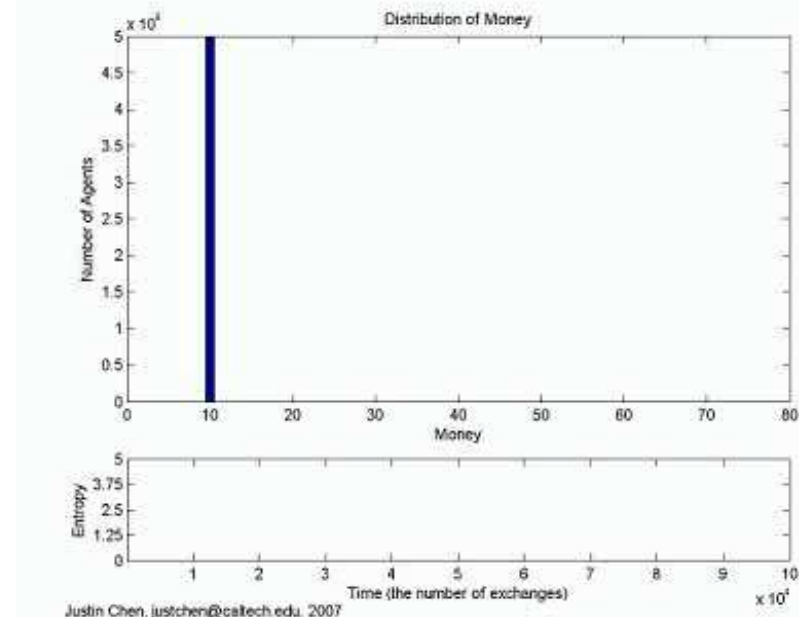
Ad 3) Základní vysvětlení – modely vzniku asymetrických rozložení

Jednoduché principy vedoucí k distribucím popsitelným **mocninnou funkcí**:

- „**Preferential attachment**“ (princip preferenčního napojení) - nové objekty mají tendenci napojovat se na již populární objekty – modely geneze rozdělení sociálních sítí, citace vědeckých článků, letiště a přístavy, turistické destinace, migrační toky ...)
- „**Self organized critically**“ (např. „kupa písku“, perkolační modely) - modely pro velikostní diference požárů, zemětřesení, lavin, epidemií...

-
- Modely „**Rich get richer**“ aneb „**endogenní**“ nerovnoměrnost rozdělení bohatství ve společnosti
 - Simulace transakcí mezi náhodně vybranými dvojicemi jedinců
 - Transakce = přesun 1\$ v rámci náhodně zvoleného páru jedinců

Více např. Yakovenko, Rosser (2009):
Colloquium: Statistical Mechanics of Money, Wealth, and Income. Reviews of Modern Physics, forthcoming



Viz

<http://www2.physics.umd.edu/~yakovenk/ec/onophysics/animation.html>

Ad 3) Základní vysvětlení – modely vzniku asymetrických rozložení

„Prostorové“ analogie k Centrální limitní větě

- Šizling et al. 2009 – krajně asymetrické rozdělení početností biologických komunit vzniká „odspodu“ statistickým procesem postupného „prostorového skládání“ rozložení početností pro menší plochy. Základními parametry procesu jsou charakter prostorových interakcí a prostorové autokorelace.

Rozdělení „výběrových charakteristik“

- Centrální limitní věta → konvergence rozdělení výběrových průměrů k normálnímu (i když je rozdělení v základním souboru asymetrické) s odhadem variance σ^2/N
- Když regiony ~ „nezávislé výběry“ → konvergence k normálnímu rozdělení se zvyšujícím se řádem sledování s odhadem variance σ^2/N – „nulový model“
- Čím silnější prostorová závislost (autokorelace) v rámci základního souboru, tím více nulový model podhodnocuje regionální variabilitu, tzn. tím šikmější dané statistické rozdělení regionálních charakteristik

Rozdíl mezi skutečnou regionální variabilitou a nulovým modelem (σ^2/N) odpovídá (statistickému) významu prostorové dimenze diferenciacce

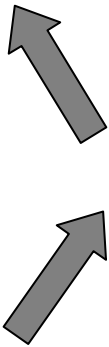
Viz také Novotný, Nosek (2009): Nomothetic geography revisited: statistical distributions₂₃ their underlying principles, and inequality measures. Geografie-Sborník ČGS, v tisku

- Těsná souvislost mezi objekty, jejichž rozdělení je popsatelné mocninnou funkcí a fraktály (vztah exponentu a fraktální dimenze)



MANDELBROT, B.B. (1975): Earth's relief, shape and fractal dimension of coastlines, and number area for islands. PNAS, 72, No. 10, pp. 3825-3838.

MANDELBROT, B.B. (1975): Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension. [Fraktály : tvar, náhoda a dimenze]

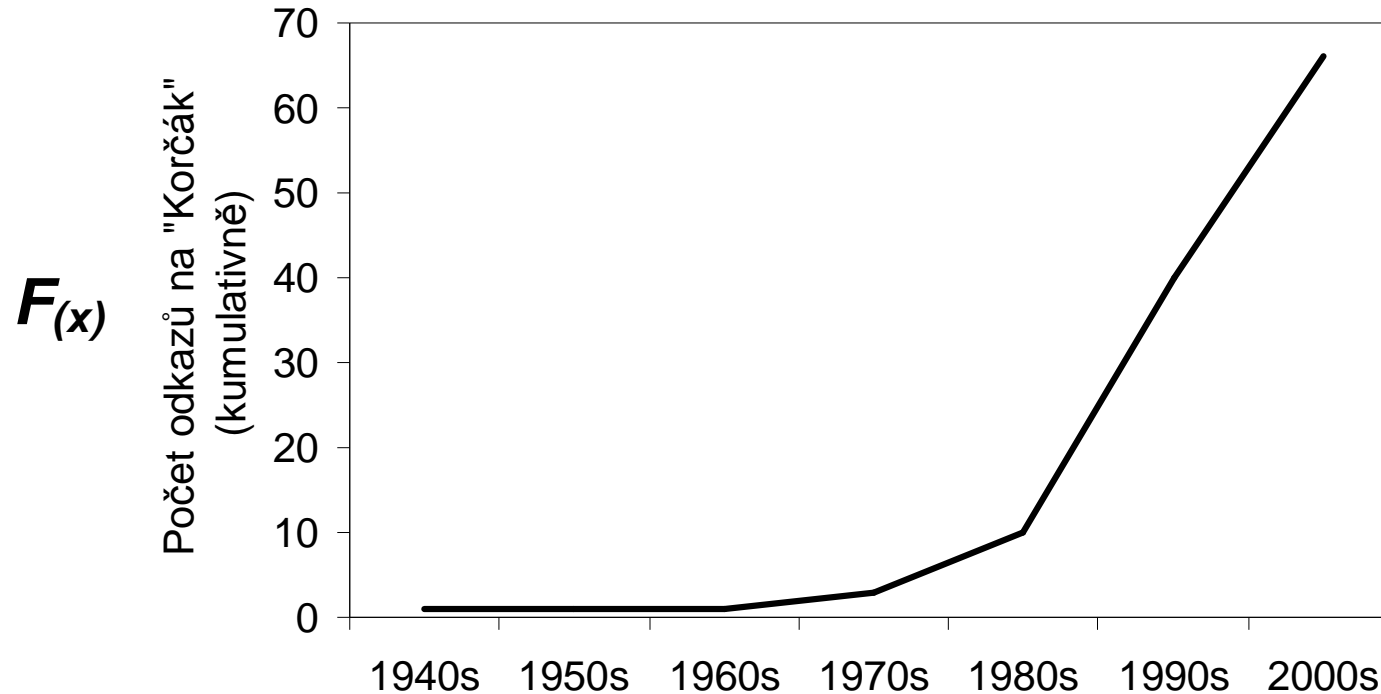


FRÉCHET M. (1941): Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. [K zákonu rozložení geografických veličin] Journal de la Société de Statistique de Paris, 82, 114-122.



KORČÁK, J. (1938): Deux types fondamentaux de distribution statistique. [Dva základní typy statistického rozložení] Bull. de l'Institute Int'l de Statistique, vol. 3, pp. 295-299.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korčák (1938)“, „Korčák’s law“, „Korčák’s exponent“



$$F_{(x)} = f_{(Korčák 1938)} / f_{(Fréchet, Mandelbrot)}$$

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (1)

1. Fréchet, M. (1941): Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. *J. de la Société de Statistique de Paris*, 82, 114-122.
2. Mandelbrot, B.B. (1975): Earth's relief, shape and fractal dimension of coastlines, and number area for islands. *PNAS*, 72, 3825-3838.
3. Mandelbrot, B.B. (1975): *Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension*. Paris, Flammarion. [anglicky 1977: *Fractals: Form, Chance and Dimension*]
4. Voss, R.F., Laibowitz, R.B., Alessandrini, E.I. (1982): Fractal (scaling) clusters in thin gold films near the percolation threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 49, 1441-1444.
5. Goodchild, M.F., Mark, D.M. (1987): The fractal nature of geographic phenomena. *Annals of the Association of American Geographers*, 77, 2, 265-278
6. Mandelbrot, B.B. (1987): *Die fraktale Geometrie der Natur*. Birkhäuser Verlag, 491 p.
7. Goodchild, M.F. (1988): Lakes on fractal surfaces: a null hypothesis for lake-rich landscapes. *Mathematical Geology*, 20, 6, 615-630.
8. Korvin, G. (1988): Fractured but not fractal: Fragmentation of the gulf of Suez basement. *Pure and Applied Geophysics*, 131, 1-2, 289-305.
9. Batty, M., Longley, P.A., (1988): The morphology of urban land use. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 15, 4, 461-488.
10. Yadava, R.D.S. (1989): Electrostatic charging of a fractal cluster and variable range hopping in thin discontinuous metal films. *J. Phys.: Condens. Matter* 1, 7245-7249.
11. Isichenko, M.B., Kalda, J. (1990): Statistical Geometry of Multiscale Isolines. Part 1: Fractal Dimension of Coastlines and Number-Area Rule for Islands. Institute for Fusion Studies, University of Texas.
12. Lewis, R.S. (1990): *Fractals in Your Future. A Primer on Theory and Applications of Fractals and Chaos*. Sudbury.
13. Sugiharta, G., May, R.M. (1990): Applications of fractals in ecology. *Tree*, 5, 3, 79-86.
14. Lin, J.R., Lian, H., Sadeghi, K.M., Yen, T.F. (1991): Asphalt colloidal types differentiation by Korcak distribution. *Fuel*, 70, 1439-1444.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (2)

15. Korvin, G. (1992): Fractal models in the earth sciences. Amsterdam and New York, Elsevier.
16. Genske, D.D., Herda, W. (1992): Fractures and fractals, In: Hudson, J.A. (ed.): *Rock Characterization*. Thomas Telford, London, 19-24.
17. Isichenko, M.B. (1992): Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Rev. Mod. Phys.*, 64, 4, 961-1043.
18. Hamilton, S.K., Melack, J.M., Goodchild, M.F., Lewis W.M. (1992): Estimation of the fractal dimension of terrain from lake size distributions, In G.E. Petts and P.A. Carling [eds.], *Lowland Floodplain Rivers: A Geomorphological Perspective*. John Wiley and Sons, Sussex. p. 145-164.
19. Hastings, M. H., Sugihara, G. (1993): *Fractals: a user guide for the natural sciences*. Oxford University Press, New York
20. Janardhan, A. S., Mansoori, G.A. (1993): Fractal nature of asphaltene aggregation. *Journal of Petroleum Science & Engineering*. 9, 1, 17-27.

21. Lavalée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D. Ladoy, P. (1993): Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: De Cola, L., Lam, N. (eds.) *Fractals in Geography*, PTR, Prentice Hall, 158-192.
22. McAnulty, P., Neosel, L.V., Cote, P.J. (1993): Mechanism-dependent fractal character of fracture surfaces in high strength and toughness astm A723 steels. Technical Report ARCCB-TR-93024, US Army Armament Research, Development and Engineering Center, Bent Laboratories.
23. Shook, K., Gray, D., Pomeroy, J. (1993): Geometry of Patchy Snowcovers. *Proceedings of the Eastern Snow Conference*, 50, 89-98.
24. Daida, J.M., French, N.H.E., Onstott, R.G., Tanis, F.J., Vesecky, J.E. (1994): Extracting seasonal parameters of sea ice morphology from SAR imagery: size distributions of first-year ice. *Proceedings of the IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. Piscataway: IEEE Press, 1994. pp. 1027–29.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (3)

25. Mandelbrot, B.B. (1994): Statistics of natural resources and the law of Pareto. In: Cramer-Barton, Ch., La Pointe P.R. (eds.) *Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes*. Plenum Press, New York, 1-12.
26. Russ, C.J. (1994): *Fractal Surfaces*. New York, Plenum, 309 p.
27. Rodríguez-Iturbe, I., Vogel, G., Rigon, R. (1995): On the spatial organization of soil moisture fields. *Geophysical Research Letters*, 22, 20, 2757-2760.
28. Chattergoon, L., Whiting, R., Grierson, L., Peters, T., Smith, C. (1995): Use of size distribution and viscosity to distinguish asphalt colloidal types. *Fuel*, 74, 2, 301-304.
29. Iannaccone, P. M., Khokha, M. K. (1996): *Fractal Geometry in Biological Systems*. Florida, CRC Press, 360 p.
30. Borges, A., Peleg, M. (1996): Determination of the apparent fractal dimension of the force-displacement curves of brittle snacks by four different algorithms. *Journal of Texture Studies*, 27, 243-255.
31. Pelletier, J.D. (1996): Analysis and modeling of scale-invariance in plankton abundance. *Atmospheric and Oceanic Physics*.
32. Jones, C.L. (1997): *Image Analysis of Fungal Biostructure by Fractal and Wavelet Techniques*. Vol 1., Swinburne University of Technology, Hawthorn, Australia.
33. Hyslip J.P., Vallejo L.E. (1997): Fractal analysis of the roughness and size distribution of granular materials. *Engineering Geology*, 48, 3, 231-244.
34. Sahimi, M., Rassamdana, H., Dabir, B. (1997): Asphalt Formation and Precipitation: Experimental Studies and Theoretical Modelling. *SPE Journal*, 2, 2, 157-169
35. Rodríguez-Iturbe, I., Rinaldo, A. (1997): *Fractal River Basins. Chance and Self-Organization*. Cambridge University Press, 565 p.
36. Vidondo, B., Prairie, Y.T., Blanco, J.T., Duarte, C.M. (1997): Some aspects of the analysis of size spectra in aquatic ecology. *Limnology and Oceanography*, 42, 1, 184-192.
37. Nepomnyashchikh, V.A. (1998): The fractal pattern of behaviour in golgfish, *Carassius auratus* L. (Cyprinidae: Pisces). *Journal of General Biology*. 59, 5.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (4)

38. Othmani, A., Kaminsky, C. (1998): Three dimensional fractal analysis of sheet metal surfaces. *Wear*, 214, 2, 147-150.
39. Xiao-Ping, X., Qiong, G., Yi-Yin, L., Zhen-Yu, Y. (1999): Fractal analysis of grass patches under grazing and flood disturbance in an alkaline grassland. *Acta Botanica Sinica*, 41, 3, 307-313.
40. Zhang X, Drake, N.A., Wainwright, J., Mulligan, M. (1999): Comparison of slope estimates from low resolution DEMs: scaling issues and a fractal method for their solution. *Earth Surface Processes and Landforms*, 24, 763-779.

41. Proietti, G., Faloutsos, C. (2000): Analysis of range queries and self-spatial join queries on real region datasets stored using an R-tree. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 12, 5, 751-762.
42. Greenwood, J.A., Wu, J.J. (2001): Surface roughness and contact: an apology. *Meccanica*, 36, 6, 617-630.
43. Granger, R.J., Pomeroy, J.W., Parviainen, J. (2002): Boundary-layer integration approach to advection of sensible heat to a patchy snow cover. *Hydrological processes*, 16, 18, 3559-3569.
44. Pascual, M., Roy, M., Guichard, F. & Flierl, G. (2002). Cluster size distributions: signatures of self-organization in spatial ecologies. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 357, 657-666.
45. Shankar, U., Pearson, Ch.P., Nikola, V.I. Ibbitt, R.P. (2002): Heterogeneity in catchment properties: a case study of Grey and Buller catchments, New Zealand. *Hydrology and Earth System Sciences*, 6, 2, 167-183.
46. Charre, J., Maby, J., Martin, P., Dérioz, p., Laques, A.E., Bachimon, P., Lajarge, R., Tanet, P. (2003): *Objets et Indicateurs Géographiques*. Édition Actes Avignon.
47. Hlavka, Ch.A., Dungan, J.L. (2004): Application of geostatistical simulation to enhance satellite image products. In: Leuangthong, O., Deutsch, C.V. (eds.) *Geostatistics Banff*, Vol. 1., p. 913-919.
48. Chik, Z. (2004): The Effect of Fragmentation on the Engineering Properties of Granular Materials. Dissertation, School of Engineering, University of Pittsburgh.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (5)

49. Liu, G., Zhou, J., Huang, D., Li, W. (2004): Spatial and temporal dynamics of a restored population of *Oryza rufipogon* in Huli Marsh, South China. *Restoration Ecology*, 12, 3, 456-463.
50. Nussinovitch, A., Jaffe, N., Gillilov, M. (2004): Fractal pore-size distribution on freeze-dried agar-texturized fruit surfaces. *Food hydrocolloids*, 18, 5, 825-835.
51. Nieto-Samaniego, A.F., Alaniz-Alvarez, S.A., Tolson, G., Oleschko, K., Korvin, G., Xu, S.S., Perez-Venzor, J.A. (2005): Spatial distribution, scaling and self-similar behavior of fracture arrays in the Los Planes Fault, Baja California Sur, Mexico. *Pure and Applied Geophysics*, 162, 805-826.
52. Menéndez, I., Caniego, J., Gallardo, J.F., Olechko, K. (2005): Use of fractal scaling to discriminate between and macro- and meso-pore sizes in forest soils. *Ecological Modelling*, 182, 3-4, 323-335.
53. Perline, R. (2005): Strong, weak and false inverse power laws. *Statistical Science*, 20, No. 1, 68-88.
54. Haddad, B., Sadouki, L., Sauvageot, H., Adane, A.H. (2006): Analyse de la dimension fractale des échos radar en Algérie, France et Sénégal. *Télédétection*, 5, 4, 299-306.
55. Farina, A. (2006): *Principles and Methods in Landscape Ecology. Toward a Science of Landscape*. Dordrecht, Springer.
56. Kueppers, U., Perugini, D., Dingwell, D. B. (2006): "Explosive Energy" During Volcanic Eruptions from Fractal Analysis of Pyroclasts. *Earth and Planetary Science Letters*, 248, 800-807.
57. Sasaki, Yo, Kobayashi, N., Ouchi, S., Matsushita, M. (2006): Fractal structure and statistics of computer-simulated and real landforms. *Journal of the Physical Society of Japan*, 75, 7.
58. Sablani, S.S., Datta, A.K., Rahman, M.S., Mujumdar, A.S. (2006): *Handbook of Food and Bioprocess Modeling Techniques*. Barnes & Noble, 605 p.
59. Debray, A., Shibata, M., Fujita, H. (2007): A low melting point alloy as a functional material for a one-shot micro-valve. *J. Micromech. Microeng.*, 17, 1442-1450.

Odborné články a knihy (dostupné na internetu), ve kterých se objevuje reference na „Korcak (1938)“, „Korcak’s law“, „Korcak’s exponent“ (6)

60. Kaye, B.H. (2007): *A Random Walk Through Fractal Dimension*. VCH Publishers, New York.
61. Lovejoy, S., Schertzer, D. (2007): Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlin. Processes Geophys.*, 14, 465-502.
62. White, E.P., Brown, J.H. (2007): The template: patterns and processes of spatial variation. In: Turner, M.G., Lovett, G.M., Jones, C.J., Weathers, K.C. (eds.) *Ecosystem Function in Heterogeneous Landscapes*, Springer, New York, 31-47.
63. Prosperina, N., Perugini, D. (2008): Particle size distributions of some soils from the Umbria Region (Italy): Fractal analysis and numerical modelling. *Geoderma*, 145, 3-4, 185-195.
64. Xu, P., Mujumdar, A.J., Yu, B. (2008): Fractal theory on drying: a review. *Drying Technology*, 26, 6, 640-650.
65. Yuan, S., Xu, H., Gu, H. (2008): Fractal analysis of polypropylene composite filled with nano-calcium carbonate. *Journal of Applied Polymer Science*, 110, 4, 1955-1960.
66. Swingler, J., Lalechos, A. (2009): Visualization and size distribution of contact spots at a real un-dismantled electrical contact interface. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42, 1-7.

„Korčákovo pravidlo“ (Korcak’s law) velikostní diferenciacie ostrovů a jezer (Mandelbrot 1975)

$$N(A \geq a) \sim a^{-b}$$

- když: $N(A \geq a)$ - relativní četnost objektů s rozlohou větší či rovnou rozloze a
- b
- „Korčákův exponent“ (empiricky pro ostrovy 0.5 – 0.75)
 - používán v ekologii jako ukazatel „skvrnitosti“ (Hastings et al. 1982)
 - vztah k fraktální dimenzi $b \sim 0.5D$ (Mandelbrot 1975)

Velikostní diferenciacie Skandinávských jezer

